



分类号:

学校代码: 10128

U D C:

密 级: 公 开

内蒙古工业大学

硕士学位论文

学生类别: 全日制学术型硕士研究生

学科名称: 填写录取学科名称

研究方向:

论文题目:

英文题目:

学 号:

学生姓名:

导师姓名: 姓名 专业技术职称

二 X X 年 X 月

原创性声明

本人声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除文中已经注明引用的内容外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 内蒙古工业大学 及其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：_____

指导教师签名：_____

日 期：_____

日 期：_____

学位论文授权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，即：内蒙古工业大学有权将学位论文的全部或部分内容保留并向国家有关机构、部门送交学位论文的复印件和磁盘，允许编入有关数据库进行检索，也可以采用影印、缩印或其它复制手段保存、汇编学位论文。为保护学校和导师的知识产权，作者毕业后涉及该学位论文的主要内容或研究成果用于发表学术论文须征得内蒙古工业大学就读期间导师的同意，并且版权单位必须署名为内蒙古工业大学方可投稿或公开发表。

本学位论文属于

保密，在_____年解密后适用本授权书。

不保密。（请在以上方框内打“√”）

学位论文作者签名：_____

指导教师签名：_____

日 期：_____

日 期：_____

摘 要

自然界存在丰富的非线性现象，这类现象均可归纳为特定非线性问题。分数阶非线性偏微分方程能精准描述复杂物理过程，已经广泛应用于流体力学、等离子体物理等领域，借助数学解析方法研究该类模型，可清晰揭示系统物理演化机制，为理解自然现象的规律与本质提供支撑。因其广泛的工程与科学应用价值，分数阶微分方程备受学者关注，其中呼吸子解、孤子解等解析解对应的非线性波研究尤为突出，这类解析解可有效模拟海洋波动、离子声波等复杂的非线性行为。

关键词：分数阶非线性偏微分方程；KP 方程族约化方法；Hirota 方法；呼吸子；孤子

Abstract

Nonlinear phenomena are ubiquitous in nature, and all of them can be generalized into specific nonlinear problems. Nonlinear fractional partial differential equations (FPDEs) are capable of depicting complex physical processes with high precision and have been widely applied in disciplines including fluid mechanics and plasma physics. Adopting mathematical analytical methods to study such models can explicitly reveal the physical evolution mechanisms of relevant systems, thus laying a theoretical foundation for understanding the inherent laws and essences of natural phenomena. Owing to their extensive applicability in engineering and scientific research, fractional differential equations have attracted considerable attention from scholars. Research on nonlinear waves associated with analytical solutions—such as solitons and breather solutions—is particularly prominent, effectively simulating complex nonlinear behaviors like ocean waves and ion acoustic waves.

Key words: Nonlinear Fractional partial differential equation; KP hierarchy reduction method; Hirota method; Breather solution; Solitons

目录

目录	v
第一章 绪 论	1
1.1 研究背景与意义	1
1.2 分数阶微积分的研究现状	1
1.3 本文的主要内容和创新点	2
第二章 适形分数阶修正的 (3+1) 维 YTSF 方程的呼吸子和 lump 解	4
2.1 适形分数阶	4
第三章 论文基本要求	6
3.1 论文题目要求	6
3.2 论文内容要求	6
3.2.1 摘要	6
3.2.2 关键词	6
3.2.3 绪论	7
3.2.4 论文主体	7
3.2.5 结论	7
3.2.6 参考文献	8
3.2.7 攻读学位期间发表的学术论文及取得的科研成果	8
3.2.8 致谢	8
3.2.9 作者简介	9
第四章 论文书写规定	10
4.1 论文书写规定	10
4.2 摘要和目录	10
4.3 论文正文	10
4.3.1 标题	10

4.3.2 名词术语	10
4.3.3 各学科的量与单位	11
4.3.4 公式	11
4.3.5 插表	11
4.3.6 插图	12
4.3.7 附录	12
4.3.8 攻读学位期间发表的学术论文及研究成果	12
总结与展望	14
参考文献	15
致谢	16
附录	17
在读期间发表的学术论文与取得的其他研究成果	18

第一章 绪 论

1.1 研究背景与意义

分数阶微分方程作为整数阶微分方程的扩展，是描述具有历史记忆和遗传特性的材料的合适方法。因此，它们在许多领域比整数阶微分模型具有优势，其中更热门的是非线性分数阶偏微分方程。分数阶偏微分方程已广泛应用于许多工程和科学学科，如电化学^[1]、光学^[2]、等离子体^[3]、生物学模型^[4]、自动化控制系统^[5]、流体^[6]和量子力学^[7]等等。在所有这些科学领域中，寻找由系统产生的问题的精确或数值解决方案是至关重要的。然而，分数阶偏微分方程的精确解通常难以获得，且多数解需满足特定条件，这成为其应用中的主要限制因素。通过研究分数阶偏微分方程，可以不断发展新的数学方法，构建更精确的数学模型，并找到更符合问题的方程来描述各种复杂的非线性现象。这种跨学科研究可以促进不同学科之间的知识流动和合作，推动科学的综合发展。因此，深入研究分数阶偏微分方程的性质以及其与整数阶模型的差异，能为高效研究非线性模型提供新的可能性。

本文所要研究的方程在流体动力学领域中有重要价值，不仅有助于我们深入理解非线性系统中的波动现象，还有望在许多领域中找到重要的应用。因此，本文的主要目标为从这些模型出发，通过适当的方法解析研究流体力学领域中的分数阶非线性模型的呼吸子、lump 波和孤子等非线性波，并以此探究一些非线性现象的本质，并为相关领域的实际应用提供一定的理论支持。

分数阶微积分是微积分的重要分支，其价值逐渐受到学界重视。自然界及诸多科学技术领域中广泛存在分数维度空间结构，在动力学建模中，分数阶微积分方法能够刻画实际问题的长期影响特性，让模型更精准地反映事物内在变化规律，其应用潜力正逐步凸显。分数阶微积分的概念最早源于 1695 年 L'Hospital 与 Leibniz 的通信^[8]。相较于整数阶微积分，分数阶微积分的发展还不够完善，至今仍未形成统一的定义体系，这也给实际应用带来了诸多不便。早在 18 世纪 Cauchy 就提出了一种分数阶导数的定义

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2\pi i} \oint \frac{f(x)}{(x - t)^{\alpha+1}} dx, \alpha \in R \quad (1-1)$$

此后 Riemann 与 Liouville 对该定义进行推广^[9], 形成 Riemann-Liouville 型分数阶导数

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx, \alpha > 0 \quad (1-2)$$

20 世纪 60 年代, Caputo 对前述定义进行改进, 得到 Caputo 型分数阶导数^[10]

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} f(x) dx, \alpha > 0 \quad (1-3)$$

两类定义仅在积分与求导顺序上存在差异. Riemann-Liouville 型导数有很强的奇异性, Caputo 型导数则弱化了这一特性, 且二者对被积函数的条件限制也各不相同. 此外, 还有 Grünwald-Letnikov 型分数阶等定义也各具特点.

分数阶微积分大多缺乏整数阶微积分那样简洁的链式法则和莱布尼茨公式, 除幂函数外, 其他初等函数均难以推导得出简洁的导数公式, 运算难度极大, 这也导致其应用长期受到限制, 促使研究者们探索出更便于运算的分数阶微积分的新定义.

1.3 本文的主要内容和创新点

本文的主要内容所涉及的计算推导、程序编写和图像分析都是在导师指导下由本人独立完成的. 本文的主要内容如下:

第一章是绪论, 简述了本文所要研究的三种不同的分数阶各自的适用领域与研究现状, 以及呼吸子、lump 波和孤子三种非线性波的研究背景与发展情况, 并介绍了本文主要采用的基本研究方法: KP 方程族约化方法和 Hirota 方法;

第二章研究了适形分数阶修正的 (3+1) 维势 YTSF 方程. 使用分数阶复变换将其约化为整数阶 YTSF 方程, 得到了方程的呼吸子解和 lump 解以及交互解, 并结合图像分析了非线性波的性质和分数阶的影响;

第三章研究了分形分数阶修正的 (3+1) 维广义浅水波方程. 使用分形复变换将其转化为整数阶广义浅水波方程, 得到了方程的呼吸子解和 lump 解以及交互解, 并根据图像描述了分数阶的影响, 以及非线性波的传播情况和交互作用;

第四章研究了截断 M 导数修正的时间分数阶 (3+1) 维 KdV-ZK 方程. 使用适当的行波变换将其转化为整数阶 (3+1) 维 KdV-ZK 方程, 得到了方程的 1-, 2-, 3-孤子解和呼吸子解, 并结合图像分析了分数阶的影响和非线性波的性质;

第五章是总结和展望. 总结本文求得的几类分数阶非线性偏微分方程的非线性波解, 并展望未来拟继续研究的方向.

本文的创新点:

(1) 构建了贴合实际物理模型的分数阶方程体系. 相比传统整数阶模型, 能够更

好刻画具有记忆性与非光滑特性的非线性波动现象；

(2) 建立了一套高效求解高维分数阶方程的解析方案. 该方法通用性较强, 可为同类分数阶模型的求解提供可借鉴的技术路径；

(3) 丰富了分数阶模型的解析解结构. 通过图像分析明确了分数阶参数对波形、传播速度及相互作用的调控规律, 揭示了非线性波的弹性碰撞特性.

第二章 适形分数阶修正的 (3+1) 维 YTSF 方程的呼吸子和 lump 解

本章研究了适形分数阶导数修正的 (3+1) 维 YTSF 方程, 给出了方程的具有不同的物理意义的不同形式下的解, 有助于我们更好的了解非线性现象的动力学意义.

Bogoyavlenskii-Schiff(BS) 方程被广泛用于研究区域内的孤子和非线性波, 包括流体力学中弱色散介质的复杂非线性问题. 此外, BS 方程与流体力学中许多经典方程有着深层联系.

$$-4v_t + \Phi v v_z = 0, \Phi = \partial^2 + 4v + 2v_x \partial^{-1}. \quad (2-1)$$

若令 $z = x$, 式 (2-1) 即为势 KP 方程. 若令 $v_y = 0$, 式 (2-1) 即为势 KdV 方程. Yu、Toda、Sasa 和 Fukuyama 在对 BS 方程的研究中提出了下列方程^②

$$[-4v_t + \Phi v v_z]_x + 3v_{yy} = 0, \Phi = \partial^2 + 4v + 2v_x \partial^{-1}. \quad (2-2)$$

2.1 适形分数阶

作为 KP 方程和 BS 方程的延伸, YTSF 方程常用于描述浅水方程中出现的混合反应, 或者用于研究非线性动力学中的孤子与波方程或弱色散介质方程.

适形分数阶导数定义的性质非常接近整数阶导数的性质, 因此链式法则和莱布尼茨公式均成立, 极大地简化了运算.

定义 2.1: 设函数 $g: (0, \infty) \rightarrow R$. 当 $t > 0$ 并且 $0 < \alpha \leq 1$ 时, 适形分数阶导数定义如下:

$$D_t^\alpha x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - x(t)}{\varepsilon}, \quad (2-3)$$

^②公式推导过程详见附录 A.

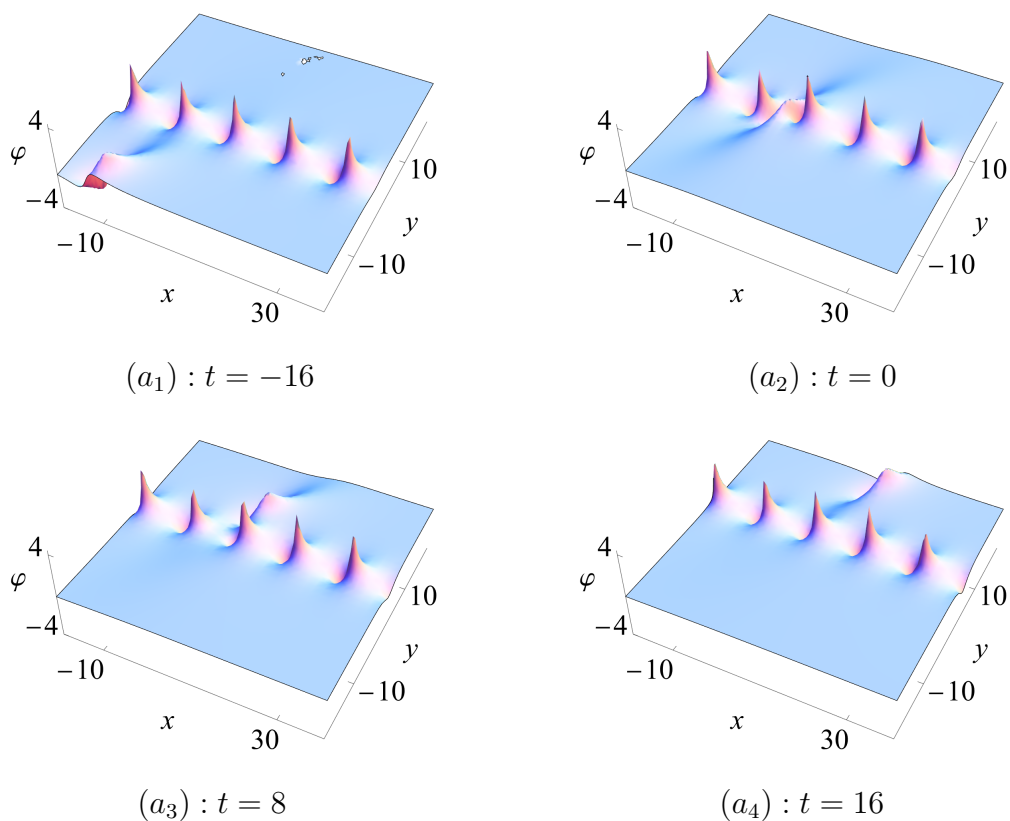


图 2.1 $x - y$ 平面上的一阶呼吸子和 lump 波的交互解，其中 $\varsigma_2^0 = 0$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\varpi = -\frac{1}{2}$,

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \Omega_2 = 1/10 - i, \beta = 1, z = 0.$$

Fig 2.1 The first-order breather on the results of a first-order breather and one lump within $x - y$ plane with $\varsigma_2^0 = 0$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\varpi = -\frac{1}{2}$, $\Omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, $\Omega_2 = 1/10 - i$, $\beta = 1$ and $z = 0$.

图 2.1 给出了整数阶情况下的交互解，可以观测到整数阶呼吸子和 lump 波，其中 τ 从 -3 取到 8. 并且呼吸子和 lump 波在接触前后的形状都没有改变.

表 2.1 表 1-1 不同条件下材料的力学性能对比

Table 1-1 Comparison of mechanical properties of materials under different conditions

条件编号	温度 (K)	压力 (MPa)	弹性模量 (GPa)	屈服强度 (MPa)
1	298	0.1	210	355
2	298	0.5	212	360
3	300	0.1	208	350
4	300	0.5	211	358
5	350	0.1	195	320

表 2.1 给出了不同条件下材料的力学性能对比.

第三章 论文基本要求

3.1 论文题目要求

论文题目应概括整个论文的核心内容，力求简明恰当，与论文内容贴切，字数不宜过多，要控制在 25 个汉字（字符）以内，并尽量不设副标题。论文题目应尽量避免使用英文字符、代号、公式和上下标等。一行写不下时可分两行写，断行应合理，应保持术语和词的连续。

3.2 论文内容要求

3.2.1 摘要

摘要是论文内容的简要陈述，应是一篇简短但意义完整的短文，应具有独立性、自明性，即不阅读论文的全文，就能通过摘要了解整个论文的必要信息。摘要内容要说明研究工作目的和意义、基本研究内容、研究方法、创造性成果及其理论与实际意义。博士学位论文必须突出论文的创造性成果，硕士学位论文必须突出论文的新见解。

摘要的写法应力求精确简明。摘要中应排除本学科领域已成为常识的内容；切忌把应在引言中出现的内容写入摘要；一般也不要对论文内容作诠释和评论（尤其是自我评价）；摘要切忌写成全文的提纲，尤其要避免将摘要写成目录式的内容介绍；摘要中尽量不使用图、表、化学结构式、特殊符号和术语，不标注引用文献号。

摘要结构要严谨、表达简明、语义确切。一般通用第三人称。建议采用“对……进行了研究”、“报告了……现状”、“进行了……调查”等记述方法标明学位论文的主题，不必使用“本文”、“作者”等作为主语。

论文的关键词，是为了文献标引工作从论文中选取出来用以表示全文主题内容信息的单词或术语，应集中体现论文特色，反映研究成果的内涵，具有语义性，在论文中有明确的出处。关键词应采用通用技术词条（参照相应的技术术语标准）。关键词一般列 3~5 个，按词条的外延层次从大到小排列。每个关键词之间用分号间隔。

英文摘要的“Key Words”应与中文摘要部分的关键词对应，每个关键词之间用分号间隔。

3.2.3 绪论

绪论（引言）一般作为第一章。绪论应包括：本研究课题的学术背景及其理论与实际意义；国内外文献综述，综述部分应对所读文献加以分析和综合；相关领域的研究进展及成果、存在的不足或有待深入研究的问题；本研究课题的来源及主要研究内容。

绪论的表述要求实事求是，不夸大、缩小前人的工作和自己的工作，言简意赅，突出重点，不与摘要雷同。

3.2.4 论文主体

论文主体是正文的核心部分，占主要篇幅，它是将学习、研究和调查过程中筛选、观察和测试所获得的材料，经过加工整理和分析研究，由材料而形成论点。论文主体内容必须实事求是，客观真切，论点明确，论据充分，应该结构合理，层次分明，推理严密，合乎逻辑，文笔流畅，语言简练，图表、参考文献规范。

论文主体应包括以下各方面：

本研究内容的总体方案设计与选择论证；

本研究内容各部分（包括硬件与软件）的设计计算；

本研究内容试验方案设计的可行性、有效性以及试验数据处理及分析；

本研究内容的理论分析。对本研究内容及成果应进行较全面、客观的理论阐述，应着重指出本研究内容中的创新、改进与实际应用之处。理论分析中，应将他人研究成果单独书写，并注明出处，不得将其与本人提出的理论分析混淆在一起。对于将其他领域的理论、结果引用到本研究领域者，应说明该理论的出处，并论述引用的可行性与有效性。

管理和人文学科的论文应包括对研究问题的论述及系统分析，比较研究，模型或方案设计，案例论证或实证分析，模型运行的结果分析或建议、改进措施等。

自然科学的论文应推理正确，结论明确，无科学性错误。

论文主体各章（除实验方法或材料等章）后可有一节“本章小结”。

3.2.5 结论

学位论文的结论作为论文正文的最后一章单独撰写，但不加章号。

结论是论文最终的总体的结论，是作者在学位论文研究过程中所取得的成果的概要总结，应概括论文的核心观点，明确、客观地指出本研究内容的创新性成果（含新见解、新观点、方法创新、技术创新、理论创新），并指出今后进一步在本研究方向进行研究工作的展望与设想。对所取得的创新性成果应注意从定性和定量两方面给出科学、准确的评价，分（1）、（2）、（3）…条列出，宜用“提出了”、“建立了”等

词叙述. 此外, 结论的撰写还应符合以下基本要求:

- (1) 结论具有相对的独立性, 不应是对论文中各章小结的简单重复, 也不能与摘要混为一谈. 结论要与引言相呼应, 以自身的条理性、明确性、客观性反映论文价值.
- (2) 结论措辞要准确、严谨, 不能模棱两可, 避免使用“大概”、“或许”、“可能是”等推测性词语. 结论中不应有解释性词语, 而应直接给出结果. 结论中一般不使用量的符号, 而宜用量的名称.
- (3) 对论文创新内容的概括, 评价要适当. 在评价自己的研究工作成果时, 要实事求是, 除非有足够的证据表明自己的研究是“首次”的, “领先”的, “填补空白”的, 否则应避免使用这些或类似词语.
- (4) 结论应指出论文研究工作的局限性或遗留问题, 如条件所限, 或存在例外情况, 或本论文尚难以解释或解决的问题.
- (5) 常识性的结果或重复他人的结果不应作为结论.

3.2.6 参考文献 博士学位论文的参考文献数一般应不少于 100 篇, 其中外文文献一般不少于总数的 1/3; 硕士学位论文的参考文献一般不少于 40 篇, 其中外文文献理工类学术学位硕士论文一般不少于 1/2, 人文社科管理类学术学位硕士论文一般不少于 1/3, 专业学位硕士(工程硕士)可根据论文的不同形式而定. 参考文献中近五年的文献数一般应不少于总数的 1/3, 并应有近两年的参考文献. 未公开发表的文章及研究报告等通常不宜作为参考文献引用.

引用网上参考文献时, 应注明该文献的准确网页地址, 网上参考文献不包含在上述规定的文献数量之内.

3.2.7 学位论文后期刊发表科研成果 攻读学位期间发表的与学位论文内容相关的学术论文(含已录用, 并有录用通知书的学术论文. 原则上录用通知书中应明确说明论文的发表卷、期号). 攻读学位期间所获得的科研成果可单做一项列出. 与学位论文无关的学术论文或研究成果不宜在此列出.

3.2.8 致谢 对导师和给予指导或协助完成学位论文工作的组织和个人表示感谢, 对课题给予资助者应予感谢. 内容应简洁明了、实事求是, 切忌浮夸与庸俗之词.

3.2.9 作者简介

对以同等学力申请学位的人员以及非全日制专业学位，其学位论文应增列此项。个人简历一般应包含大学毕业时间、院校、专业，主要工作单位及从事过的与本学位论文内容有关的工作及科研成果、发表的论著等。其它类别研究生自愿选择。

第四章 论文书写规定

除外语专业研究生外,研究生学位论文应使用国家通用语言文字撰写,采用国务院发布的《通用规范汉字表》的规范汉字编写,标点符号应符合 GB/T15834 的规定.学位论文应立论正确,层次分明,文字简练.学位论文的摘要、图题及表题等,都要求用中、英文两种文字给出,编排上中文在前.

外语专业研究生学位论文的目录、正文和致谢等应用所学专业相应的语言撰写,但封面、原创性声明和学位论文版权使用授权书应用使用国家通用语言文字撰写,摘要应使用使用国家通用语言文字、英文和所学专业相应的语言对照撰写,为能完整描述学位论文的主要内容,中文摘要宜不少于 5000 字.

4.1 论文书写规定

博士学位论文:一般不少于 6 万字,其中绪论要求为 1 万字左右.

学术学位硕士学位论文:理工科一般为不少于 2.5 万字,管理及人文学科一般为不少于 3.5 万字,其中绪论要求为 3000~5000 字.

学位论文中主要研究内容部分不得少于全文的一半.

4.2 摘要和目录

摘要的字数(以汉字计),博士学位论文为 1000~2000 字,硕士学位论文一般为 500~1000 字,均以能将规定内容阐述清楚为原则.摘要页不需写出论文题目.

英文摘要部分的标题为“Abstract”,英文摘要与中文摘要的内容应完全一致,在语法、用词上应准确无误.

4.3 论文正文

4.3.1 标题

论文正文分章节撰写,每章应另起一页.

各章标题要突出重点、简明扼要.字数一般应在 15 字以内,不得使用标点符号.标题中尽量不采用英文缩写词,对必须采用者应使用本行业的通用缩写词.

4.3.2 名词术语

学位论文中采用的术语、符号、代号在全文中应统一,并符合规范化的要求.科学技术名词的使用应符合 CY/T119 的规定.论文中使用专业术语、缩略词应在首次出现时加以注释.外文专业术语、缩略词,应在首次出现的译文后用圆括号注明原词语全称.

4.3.3 各学科的量与单位

各学科的量与单位，要严格执行国家标准《国际单位制及其应用》（GB3100-1993）、《有关量、单位和符号的一般原则》（GB/T 3101-1993）的规定。国家标准中未规定的，应执行国际标准或行业标准（GB/T 3102（所有部分））；不同的量必须用不同的符号表示，不得一符多义，含义相同的量则必须用同一符号表示。

量的符号一般为单个拉丁字母或希腊字母，并一律采用斜体（pH 例外）。为区别不同情况，可在量符号上附加角标。

单位名称的书写，可以采用国际通用符号，也可以用中文名称，但全文应统一，不得两种混用。

4.3.4 公式

公式原则上应居中书写。若公式前有文字（如“解”、“假定”等），文字空两格写，公式仍居中写。

公式序号按章编排，如第一章第一个公式序号为“(1-1)”，第二章中的第一个公式为(2-1)等。

文中引用公式时，一般用“见式(1-1)”或“由公式(1-1)”。

公式中用斜线表示“除”的关系时应采用括号，以免含糊不清，如 $a/(b\cos x)$ 。通常“乘”的关系在前，如 $a\cos x/b$ 而不写成 $(a/b)\cos x$ 。

4.3.5 插表

表的编排建议采用国际通行的三线表，即顶线、底线和栏目线（注意：没有竖线）。其中顶线和底线为 0.75pt 粗线，栏目线为 0.5pt 细线，排版三线表必要时可加辅助线，三线表的组成要素包括：表序、表题、项目栏、表体、表注。表头设计应简单明了，尽量不用斜线。表头中可采用化学符号或物理量符号。每个表格均应有表题（由表序和表名组成）。表序一般按章编排，如第一章第一个插表的序号为“表 1-1”等。表序与表名之间空一格，表名中不允许使用标点符号，表名后不加标点。表题置于表上，用中、英文两种文字居中排写，中文在上。全表如用同一单位，则将单位符号移至表头右上角，加圆括号。表中数据应准确无误，书写清楚。数字空缺的格内加横线“—”（占 2 个数字宽度）。表内文字或数字上、下或左、右相同时，采用通栏处理方式，不允许用“//”、“同上”之类的写法。表内文字说明，起行空一格、转行顶格、句末不加标点。一般情况下插表不能拆开两页编排，若某表在一页内安排不下时，才可转页，以续表形式接排。表右上角注明编号，编号后加“(续表)”，并重复表头。插表的上下与文中文字间需空一行编排。引用文献中的表格时，除在正文文字中标注参考文献序号以外，还必须在中、英文表题的右边以上角标注参考文献序号。

4.3.6 插图

插图应与正文文字紧密配合，文图相符，内容正确。图要精选，要具有自明性，即只看图、图题和图例，不阅读正文，就可理解图意。

每个图均应有图题（由图号和图名组成）。图号按章编排，如第一章第一个插图的图号为“图 1-1”等。图题置于图下，用中、英文两种文字居中书写，中文在上。有图注或其它说明时应置于图题之上。图名在图号之后空一格排写。图中若有分图时，分图题置于分图之下，分图号用 a)、b) 等表示。

图中各部分说明应采用中文（引用的外文图除外）或数字项号，各项文字说明置于图题之上（有分图题者，置于分图题之上）。

引用文献中的插图时，除在正文文字中标注参考文献序号以外，还必须在中、英文图题的右边以上角标注参考文献序号。

4.3.6.1 插图编排

插图之前，正文中必须有关于本插图的提示，如“见图 1-1”、“如图 1-1 所示”等。插图与其图题为一个整体，不得拆开排写于两页。图片尺寸要适中，尽可能使 2 张图片能够并排编排。插图处的该页空白不够排写该图整体时，则可将其后文字部分提前排写，将图移到次页最前面。

有数字标注的坐标图，必须注明坐标单位。

学位论文中的照片可为黑白或彩色，应主题突出、层次分明、清晰整洁、反差适中。照片图要求主题和主要部分的轮廓鲜明清晰、反差适中。对金相显微组织照片等，应在右下角给出放大标尺，表示目的物尺寸的标度。

4.3.7 附录

对需要收录于学位论文中且又不适合书写于正文中某些重要的数据表格、计算程序、统计表、详细公式推导等有特色的内容，可作为附录排写，是论文主体的补充内容，可根据需要设置。附录的格式与正文相同，序号采用“附录 A”、“附录 B”等。只有一个附录时也要编序号，即附录 A。每个附录应有标题，例如：“附录 A 呼和浩特市 2013 年度工业经济统计数据”。

附录中的图、表、数学表达式、参考文献等另行编序号，与正文分开，一律用阿拉伯数字编码，但在数码前冠以附录的序号，例如“图 A.1”，“表 B.2”，“式 (C-3)”等。

4.3.8 攻读学位期间发表的学术论文及研究成果

- (1) 已经刊载的学术论文，书写格式与参考文献同。
- (2) 尚未刊载，但已经接到正式录用函的学术论文，按照参考文献格式书写。在

每一篇文献后加括号注明已被 ×××× 期刊录用

(3) 研究成果可以是在学期间参加的研究项目、获得专利或获奖情况等. 获得专利请注明专利名称、作者、专利号; 奖项请注明获奖名称、颁奖部门、获奖时间及个人在获奖者中的名次.

总结与展望

一、总结

结论是论文最终的总体的结论，是作者在学位论文研究过程中所取得的成果的概要总结，应概括论文的核心观点，明确、客观地指出本研究内容的创新性成果（含新见解、新观点、方法创新、技术创新、理论创新），并指出今后进一步在本研究方向进行研究工作的展望与设想。对所取得的创新性成果应注意从定性和定量两方面给出科学、准确的评价，分（1）、（2）、（3）…条列出，宜用“提出了”、“建立了”等词叙述。此外，结论的撰写还应符合以下基本要求：

- （1）结论具有相对的独立性，不应是对论文中各章小结的简单重复，也不能与摘要混为一谈。结论要与引言相呼应，以自身的条理性、明确性、客观性反映论文价值。
- （2）结论措辞要准确、严谨，不能模棱两可，避免使用“大概”、“或许”、“可能是”等推测性词语。结论中不应有解释性词语，而应直接给出结果。结论中一般不使用量的符号，而宜用量的名称。
- （3）对论文创新内容的概括，评价要适当。在评价自己的研究工作成果时，要实事求是，除非有足够的证据表明自己的研究是“首次”的，“领先”的，“填补空白”的，否则应避免使用这些或类似词语。
- （4）结论应指出论文研究工作的局限性或遗留问题，如条件所限，或存在例外情况，或本论文尚难以解释或解决的问题。
- （5）常识性的结果或重复他人的结果不应作为结论。

二、展望

这里是论文的展望部分，后续工作将关注以下方向开展：

参考文献

- [1] Mills R.L. The nature of free electrons in superfluid helium—a test of quantum mechanics and a basis to review its foundations and make a comparison to classical theory[J]. International Journal of Hydrogen Energy, 2001, 26(10):1059-1096.
- [2] Feng Qinghua. A new analytical method for seeking traveling wave solutions of space–time fractional partial differential equations arising in mathematical physics[J]. Optik, 2017, 130:310-323.
- [3] Abro K.A. Role of fractal-fractional derivative on ferromagnetic fluid via fractal Laplace transform: A first problem via fractal-fractional differential operator[J]. European Journal of Mechanics B-Fluids, 2021, 85:76-81.
- [4] Ghanbari B., Kumar S. A study on fractional predator–prey–pathogen model with Mittag–Leffler kernel-based operators[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2024, 40(1):e22689.
- [5] Yalçın U.T., Öztürk S. Oscillation criteria for fractional differential equations with a distributed delay[J]. Soft Computing, 2023, 27(13):8517-8523.
- [6] Zafar A., Ijaz M., Qaisar A., et al. On assorted soliton wave solutions with the higher-order fractional Boussinesq–Burgers system[J]. International Journal of Modern Physics B, 2023, 37(32):2350287.
- [7] Korpınar T., Korpınar Z., Ozdemir H. New optical quantum conformable fractional derivative for spherical electromagnetic tube[J]. Optical and Quantum Electronics, 2023, 55(13):1136.
- [8] Leibniz G.W. Mathematische schriften[M]. Chicago:Georg Olms, 1860.
- [9] Podlubny I. Fractional Differential Equations[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [10] Caputo M. Elasticità e Dissipazione[M]. Bologna: Zanichelli, 1969.

致 谢

这里是本篇论文的致谢部分。

作者

年月于 内蒙古工业大学

附录 A 部分文中未列参数结果

在读期间发表的学术论文与取得的其他研究成果

一、已取得的学术成果

- 1.[序号] 作者. 文献题名 [J]. 刊名, 出版年份, 卷号 (期号): 起止-页码
- 2.[序号] 作者. 题名 [A]. 主编. 论文集名 [C]. 出版地: 出版社, 出版年: 起止-页码
- 3.[序号] 专利所有者. 专利题名 [P]. 作者排名. 专利国别. 专利类型. 专利号, 发布日期

二、获奖情况

1. XX 年 X 月, 荣获国家奖学金;
2. XX 年 X 月, 荣获三好学生称号;
3. XX 年 X 月, 获得“华为杯”中国研究生数学建模竞赛三等奖.

三、主持的科研项目

XX 年, 内蒙古自治区直属高校科研业务费项目“项目题目”, 项目编号. (已结题)